

# РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд  
за придобиване на образователната и научна степен “Доктор”

Област: 4. “Природни науки, математика и информатика”

Научно направление: 4.6. “Информатика”

Тема: “Мрежово кодиране и аналози на дизайни”

Автор: **Невяна Димитрова Георгиева**

## Тема на дисертационния труд

Представеният дисертационен труд е посветен на задача, която може да бъде отнесена към областта на крайните геометрии и теория на дизайните с ясно приложение към теория на кодирането и по-специално във възникналата наскоро теория на мрежовите кодове. Основният проблем, който се разглежда в този труд е намирането на необходими и достатъчни условия за съществуване на спредове в проективни геометрии на Йелмслев – това са най простите аналози на дизайни в тези геометрии. В геометриите на Галоа, които са координатни геометрии над крайни полета, въпросът за съществуването на спредове от подпространства е решен удовлетворително с намирането на необходимо и достатъчно условие за съществуване. За по-сложните геометрии над верижни пръстени решението на този въпрос е значително по-трудно. В настоящия дисертационен труд е представено решение в някои важни специални случаи, а именно, когато подпространствата от спреда са свободни или подпространства на Йелмслев.

## Литературен обзор

Общото ми впечатление е, че дисертантът познава отлично съвременното състояние на разглежданите проблеми. Голяма част от изследванията ѝ са върху кръг от задачи и хипотези от крайните геометрии и теория на дизайните, считани за значими в теоретичен план. Докторантът демонстрира познаване на областта на изследванията и възможности творчески да прилага знанията си.

## Методика

В изследванията си докторантът използва широк арсенал от математически средства, които могат да бъдат причислени най-вече към линейната алгебра, абстрактната алгебра, теория на модулите, теория на комбинаторните конфигурации и приложението им към близки области като проективна геометрия и геометрии над пръстени.

## Съдържание и резултати на дисертационния труд

Дисертационният труд е в обем от 78 нестандартни машинописни страници и се състои от четири глави и списък на използваната литература, включващ 85 заглавия.

По-долу ще изложим накратко съдържанието на отделните глави от дисертацията.

Глава 1 е уводна. В нея се излага накратко развитието на няколко различни области, които имат отношение към дисертационния труд. На първо място това са координатните геометрии над верижни пръстени или геометрии на Йелмслев. На второ място това е теорията на линейните кодове над пръстени. Следва геометричната интерпретация на тези кодове и накрая теория на дизайнните и връзките ѝ с мрежовите кодове и кодовете в рангова метрика, въведени от Делсарт и Габидулин. В останалата част на главата е направен обзор на по-важните резултати от дисертационния труд.

В глава 2 са представени основните теоретични резултати, използвани в дисертационния труд. Тази глава е структурирана в три раздела, които са посветени съответно на крайни верижни пръстени, крайно породени модули над крайни верижни пръстени стени и координатни геометрии над крайни верижни пръстени. Един интересен и относително неизвестен резултат от първия раздел е Теорема 2.2 на А. А. Нечаев, която характеризира крайните верижни пръстени. Въпреки този резултат класификация на крайните верижни пръстени (с точност до изоморфизъм) е известна само за индекс на-nilпотентност  $m = 2$  (Кронхайм). В раздел 2.2 е описана общата структура на модул над краен верижен пръстен (Теорема 2.7), което е добре известен алгебричен резултат. Централен резултат тук е теорема 2.8 в която се дава формула за броя на подмодулите от тип  $\mu$ , съдържащи се в модул от тип  $\lambda$ .

В раздел 2.3 са изложени важни резултати за геометрии на Йелмслев. Изложена е аксиоматичната дефиниция на А. Кройцер на проективните пространства на Йелмслев. Координатните геометрии над крайни верижни пръстени удовлетворяват тези аксиоми и представляват може би най-важният клас от геометрии, т. нар. геометрии на Йелмслев. Макар и по-сложни от геоме-

триите на Галоа, геометриите на Йелмслев има хубава структура, която е описана в теореми 2.11-2.14.

Оригиналните приноси на автора се съдържат в глави 3 и 4.

Глава 3 е посветена на един проблем, който възниква при опит за компютърно представяне на подмодулите от даден тип над даден верижен пръстен. Разбира се, всеки модул може да се представи като породен от редовете на дадена матрица, но е ясно, че има много такива представяния и е важно да се избере такова, което е в някакъв смисъл единствено. Това представяне трябва да е удобно при работа с модули, в смисъл, че трябва да позволява лесно сравняване на модули и лесни операции с модули.

Такова представяне е въведено с дефиниция 3.1 и е наречено стандартна форма на матрица. Централен резултат в глава 3 е Теорема 3.3, съгласно която за всеки модул  ${}_R M$  над верижен пръстен  $R$  съществува единствена матрица в стандартна форма, чиито редове пораждаат  ${}_R M$ . От тези теорема се получава и важното следствие 3.4, което представя общ вид на матрица пораждаща модул от даден тип. В термините на линейни кодове формула (3.1) може да се разглежда като пораждаща матрица в стандартна форма. Както и при линейните кодове над крайни полета, тази форма позволява (относително) лесно получаване на пораждаща матрица за ортогоналния код.

По-нататък са представени във псевдокод няколко алгоритъма за работа с модули, при които се използва въведената стандартна форма. Те включват алгоритъм за получаване на матрица в стандартна форма, алгоритми за обединение и сечение на модули, тест за включване, алгоритъм за намиране на ортогоналния на даден модул и алгоритъм за пораждане на всички подмодули от даден тип на фиксиран модул задаен с матрица в стандартна форма. Най-интересна и важна тук е Теорема 3.8, в която се намира в явен вид матрица, чиито редове пораждаат ортогоналния на даден модул.

Глава 4 е посветена на  $R$ -аналози на дизайни и на един специален тип дизайни, наречени спредове. Тази глава е структурирана в три раздела.

В раздел 4.1 са въведени  $R$ -аналози на дизайни. Дефиницията е естествена: това е семейство от подмодули от даден тип съдържащи всеки подмодул от друг фиксиран тип един и същ брой пъти. В този раздел са направени някои прости комбинаторни наблюдения за взаимовръзките между различните типове дизайни. В края на раздела са въведени и спредовете като специален вид дизайни, представляващи множество от подпространства от даден тип в геометрия на Йелмслев, съдържащи всяка точка от  $\text{PHG}({}_R R^{n+1})$  точно веднъж. В този смисъл те са дори аналози на Шайнеровите системи.

Раздел 4.2 е посветен на намирането на необходимите и достатъчни условия за съществуването на спредове от подпространства от даден тип. Изходна то-

чка е Теорема 4.7 (която е доказана от Кирмайер и Ланджев), съгласно която в случая на спредове от подпространства на Йелмслев съществува необходимо и достатъчно условие, аналогично на това за спредове в геометрии на Галоа.

В Теорема 4.8 е доказано ново необходимо условие за съществуване на спред, което обобщава условието на Кирмайер-Ланджев. Това условие, разбира се, не е достатъчно както се демонстрира в раздел 2.3. По-нататък в Теореме 4.10-4.12 са доказани няколко достатъчни условия за съществуване на спредове, които дават широки класове от спредове от подпространства, които не са подпространства на Йелмслев (асоциирани с несвободни подмодули). След Теорема 4.12 е изказана хипотеза за необходимо и достатъчно условие за съществуване на спредове.

Раздел 4.3 е посветен на конструирането на пример, който демонстрира, че комбинаторното необходимо условие за съществуване на спредове не винаги е достатъчно. Ще отбележим, че това не е контрапример към Теорема 4.8. Този раздел съдържа единствена Теорема 4.13, в която е доказано, че при четни  $n$  не съществуват спредове в  $\text{PHG}(R R^n)$  от несвободни подпространства от тип  $\lambda = 2^{n/2} 1^a$  за всяко  $a$ ,  $1 \leq a \leq \frac{n}{2}$ . Тази теорема е доказана за верижни пръстени с индекс на нилпотентност 2. Това дава широк клас от типове на подпространства, за които комбинаторното необходимо условие не е достатъчно. С тези резултати седемонстрира, че намирането на общо необходимо и достатъчно условие за съществуването на спредове в геометрии на Йелмслев е може би трудна задача.

### **Приноси на дисертационния труд**

По мое мнение по-важните приноси в дисертационния труд са следните:

- (1) Въведена е стандартна форма за матрица над краен верижен пръстен. Това е единствената матрица от този вид, пораждаща даден модул.
- (2) Описани са алгоритми за работа с модули, представени чрез матрици в стандартна форма.
- (3) Намерена е матрица в стандартна форма, чийто редове пораждат ортогоналния на фиксиран модул.
- (4) Представено е ново необходимо условие за съществуване на спредове от несвободни подпространства.
- (5) Представени са няколко нови достатъчни условия за съществуване на спредове от несвободни подпространства.

- (6) Конструиран е клас от типове, за които комбинаторното необходимо условие за съществуване на спредове не е достатъчно.

### **Забележки и коментари по дисертационния труд**

Във връзка с дисертационния труд имам следните въпроси, забележки и коментари:

- (1) Обобщеният индекс на Гаус не зависи от индекса на nilпотентност на пръстена  $R$ , а само от типовете  $\lambda$  и  $\mu$  и от реда  $q$  на остатъчното поле. Затова е по-добре означението да е  $\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}_q$  вместо  $\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}_{q^m}$ .
- (2) Интересен е въпросът възможно ли е да се обобщи Теорема 4.13 за пръстени с произволен индекс на nilпотентност.
- (3) Резултатите от дисертационния труд са докладвани на два семинара по теория на кодирането и две пролетни сесии на ФМИ. Пожелателно е те да се докладват и на специализирани конференции по теория на кодирането и крайни геометрии, където биха получили по-задълбочена оценка.

### **Публикации по дисертационния труд**

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в три статии, които са излезли от печат. Списанията, в които са отпечатани тези работи са следните:

- Designs, Codes and Cryptography (импакт фактор: 1.524, Q2)
- Annuaire de l'Universite de Sofia – 1 статия
- Serdica Journal of Computing - 1 статия

Една от статиите е с импакт-фактор, а другите две са реферирани в Zentralblatt.

Една от представените статии е самостоятелна и две са с по един съавтор.

### **Авторство на получените резултати**

Тъй като познавам научните интереси на докторанта и следя работата ѝ през последните години, за мен няма съмнение, че нейният принос е равностоен

на този на останалите съавтори. Представените публикации удовлетворяват минималните изисквания в Закона за развитие на академичния състав в Република България, Правилника за прилагането му и Правилника на Нов Български Университет.

### **Цитирания на публикациите от дисертационния труд**

Дисертантът не е приложил списък на цитирания на статиите, въз основа на които е написан дисертационният труд.

### **Автореферат и авторска справка**

Авторефератът в обем от 13 страници е направен съгласно изискванията и отразява правилно резултатите и приносите в дисертационния труд.

### **Заклучение**

Считам, че представеният дисертационен труд **“Мревоцо кодиране и анализи на дизайни”** с автор **Невяна Димитрова Георгиева** съдържа интересни резултати, които представляват оригинален принос в крайните геометрии и теория на комбинаторните конфигурации. Докторантът показва задълбочени теоретични познания в тези области и с това отговаря на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България, Правилника за неговото прилагане и Правилника на НБУ за присъждане на образователната и научна степен “Доктор”. В дисертационния труд и свързаните с него публикации няма установено плагиатство.

Изложеното по-горе ми дава основание да дам **положителна оценка** на представения дисертационен труд и да препоръчам на Уважаемото Жюри да присъди на Невяна Димитрова Георгиева образователната и научна степен ”Доктор” в област 4. “Природни науки, математика и информатика”, научно направление 4.6 “Информатика”.

София, 10.06.2022 г.

Рецензент:

(доц. Ася Русева д.н.)