Обучение чрез задачи

Откъс от „Система от задачи в обучението по математика“

Петя Асенова
Марин Маринов
Нов български университет

1. Що е система от задачи

Задачите играят важна роля в обучението. Те могат да се разглеждат в два аспекта: като цел на обучението и като средство за обучение. Първият аспект е насочен към овладяване на методи за решаване на класове задачи. Вторият аспект се отнася до използване на задачите като метод за обучение.

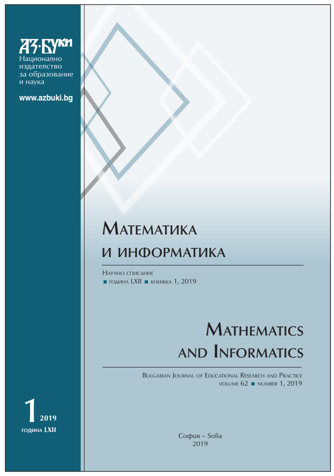
Тази статия е посветена на втория аспект.

Обучение, което се осъществява с помощта на задачи, изисква специално разработена система. Разработването на система от задачи е въпрос, разглеждан в изследванията на редица математици от руската школа по методика на обучението по математика. Такива са работите на Dalinger V. A. (Dalinger, 1982), Kolyagin Y. M. (Kolyagin, 1977), Muravin K. S. (Muravin, 1966), Sarantsev G. S. (Sarantsev, 1982), Suvorova S. V. (Suvorova, 1982) и др. В България темата намира отражение в изследванията на Asenova P. (Asenova, 1990), Dureva D. (Dureva, 2001), Garov K. (Garov, 2004; Garov, 2006; Garov, 2010), и др.

Тук ще възприемем следното определение за ***система от задачи***: *това е методически обоснована съвкупност от задачи, която осигурява постигане на планирани резултати в обучението.*

Всяка задача от системата носи определена информация, свързана с изучавания теоретичен материал, има определено място и роля (Kolyagin, 1977). Задачите в системата се подреждат по принципа от просто към сложно (Asenova, 1990; Dalinger, 1982; Kolyagin, 1977). Задачите в системата трябва да са разнообразни по тип и да способстват за формиране на знания и умения на различни равнища на усвояване (Asenova, 1990), (Dalinger, 1982). Задачите трябва да са достатъчно за работата в клас и самостоятелната работа у дома. Системата от задачи

Заглавието е на редакцията



www.mathinfo.azbuki.bg

Списанието се реферира и индексира в Web of Science: Emerging Sources Citation Index

Съдържание на сп. „Математика и информатика“, кн. 1/2019:

осигурява всички етапи на усвояване на знанието – въвеждане на новото учебно съдържание, неговото затвърждаване и прилагане на различни равнища (Asenova, 1990; Dalinger, 1982).

Задачите за въвеждане на ново учебно съдържание изпълняват различни функции: мотивиране на изучаваното ново съдържание, разкриване на неговата същност (съществени свойства), въвеждане на термини, открояване на последователност от стъпки за действие (в теоретичен и операционален план) (Asenova, 1990).

Задачите за затвърждаване способстват за осъзнатост и трайност на въведените знания. Те отработват съществените признаци на понятията и алгоритмите за действие.

Задачите за приложение на изучавания материал са важна методическа стъпка. Знанията се считат усвоени, когато обучаемите са способни да ги прилагат. Подборът на задачите тук е насочен към разбиране на границите на приложимост на изучаваните обекти, към разкриване на вътрешнопредметните връзки и връзките към други системи от обекти. Задачите разкриват приложения на различни равнища на сложност – от репродукция до приложение в стандартни и нестандартни ситуации (Asenova, 1990).

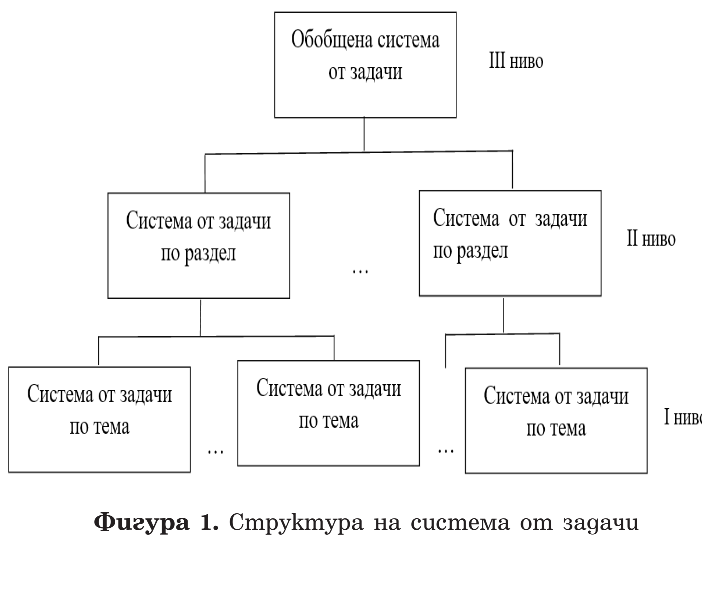
При *проектиране на системата* от задачи са целесъобразни следните етапи:

– да се определят целта и очакваните резултати, които ще формира системата, и условията за тяхното постигане;

– да се подберат подходящи задачи, като се съблюдават изложените по-горе принципи;

– да се осмислят методическите похвати за използване на системата от задачи – организация, използвани методи и средства за обучение (Asenova, 1990).

Dalinger V. A. включва и *система от задачи второ равнище*. Той я разглежда като обобщаваща система за даден учебен предмет (Dalinger, 1982). Asenova P. разглежда системите от задачи като тематични, обобщаващи за тематичен раздел и обобщаващи по предмета (фиг. 1). Това разделение е естествено за структурата на учебното съдържание по даден предмет (Asenova, 1990).



Фигура 1. Структура на система от задачи

Създаването на система от задачи не е еднократен акт. Системата се усъвършенства непрекъснато според обратната връзка от нейното използване и нивото на учениците, за които е предназначена.

2. Проектиране на система от задачи

Ще илюстрираме създаването на система от задачи на примера на темата *Сечение на многостен с равнина за XI клас, свободноизбираема подготовка (СИП).* Това е система от задачи първо равнище.

Ще проектираме системата, като определим нейните основни параметри: цел, очаквани резултати, подбор на задачите, методи и средства за използване.

Цел: обучаемите да се научат да построяват сечения на многостен с равнина.

Очаквани резултати:

– да разбират понятията: секуща равнина, сечение на многостен с равнина, следа;

– да знаят алгоритъма за построяване на сечение на многостен с равнина по метода на следата и да умеят да го прилагат при решаване на задачи;

– да използват допълнителни помощни сечения за построяване на сечения.

Условия на използване на системата от задачи

Предварителните знания, които имат обучаемите и на които се разчита, са: многостен, видове многостени, равнина, различни начини за определяне на равнина, пресечници на две равнини. Обучаемите имат базови знания и умения за изчисляване и построения по стереометрия от задължителната подготовка, а някои от тях могат да имат по-висока степен на владеене от профилираната подготовка.

Методи и средства

Препоръчва се да се използва компютърна система за визуализация и анимация на сеченията като Geogebra, Halomda, Wolfram Mathematica и др. В настоящата разработка се използва Wolfram Mathematica. Визуализацията и анимацията са средство да се демонстрират и анализират елементите на обекти в тримерно пространство, да се проследява последователността на построяването на сечения. Демонстрациите се съпътстват от анализ и дискусия. Компютърните системи се използват като помощно средство за демонстрация, подпомагащо по-добро разбиране на същността на методите за построяване на сечения и проследяване на последователността на самото построяване. Обучаемите прилагат наученото за построяване на сечения във вариативни ситуации, ползвайки традиционни средства. По този начин се предизвиква по-голяма активност в процеса на обучение и по-голямо разбиране на усвояваните материал.

3. Подбор на задачите и използване на системата от задачи

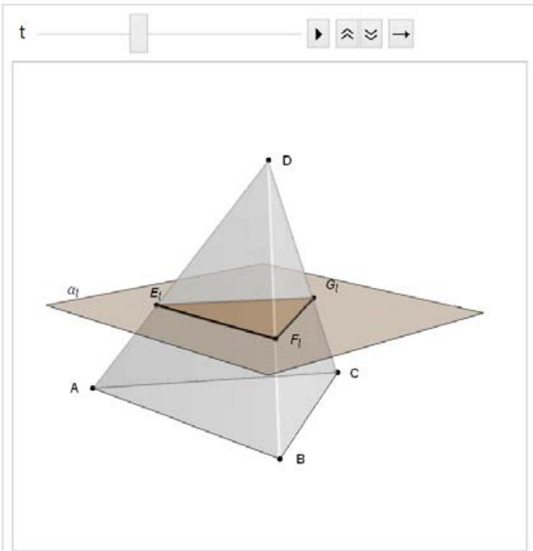
Задача 1. Даден е тетраедър $ABCD$.

а) Опишете взаимното разположение на неговите върхове, ръбове и стени.

б) Нека α е равнина, успоредна на основата ABC. Как се променя сечението на тетраедъра $ABCD$ с равнината α, когато α се движи от основата към върха?

Задачата е подходяща да се припомни взаимно положение на точки, прави и равнини в пространството. Системата Mathematica позволява тетраедърът $ABCD$ да се завърта в различни положения, за да се огледа от различни посоки разположението на елементите точки, прави, равнини. Упражнението е полезно за развиване на ориентация в тримерно пространство. Втората част на задачата дава възможност да се въведат основните за темата понятия секуща равнина и сечение на многостен с равнина. Използването на анимация (виж анимация 1) позволява да се проследи промяната на сечението, когато секущата равнина α се движи от основата ABC към върха D.

Анимация 1. Анимацията демонстрира сеченията $\beta_t = ABCD \cap \alpha_t$, $0 \le t \le 1$, където равнините α_t са успоредни на равнината (ABC), α_0 съвпада с равнината (ABC) и транслирайки се, стига до α_1, за която точката D е единствената ѝ обща точка с $ABCD$.



Фигура 2. Сечение на тетраедър с равнина, успоредна на основата (задача 1)

Анимацията демонстрира, че за $0 \le t < 1$ сечението $\beta_t = ABCD \bigcap \alpha_t$ е триъгълник $E_tF_tG_t$, при което $E_0 = A, F_0 = B$ и D $G_0 = C$ (виж фиг. 2). С нарастването на t от 0 до 1 точката E_t се движи по реброто AD и при $t = 1$ съвпада с точката D. Аналогично точката F_t се движи по реброто BD, а точката G_t се движи по реброто CD и $F_1 = D = G_1$. Подчертава се фактът, че върховете на сечението са точки от ръбовете на тетраедъра, а страните на сечението са отсечки, принадлежащи на стените на тетраедъра.

Натрупаният опит от дискусиите върху задача 1 и анимация 1 ни дават възможност да преминем към анализ на задача 2.

Задача 2. Нека E е фиксирана точка от стената ABD на тетраедъра $ABCD$, а равнината α съдържа E и е успоредна на равнината (ABC). Ще построим сечението на тетраедъра $ABCD$ с равнината α.

Геометричният експеримент, демонстриран с анимация 1, насочва към отговора: $ABCD \bigcap \alpha = E_tF_tG_t$ за такова t, за което $E \in E_tF_t$. Съществуването на такова t е естествено – анимация 1 показа, че отсечката E_tF_t преминава през всяка точка на стената ABD. Освен това решението ни дава повод да се припомни следното.

Аксиома 1. Ако две различни равнини имат две общи точки, то правата, определена от тези точки, е сечението на равнините (пресечница).

Теорема 1. Ако успоредните равнини α и β се пресекат с трета равнина γ, то сеченията $\alpha \bigcap \gamma$ и $\beta \bigcap \gamma$ са успоредни прави.

Решение:

1) Понеже успоредните равнини α и (ABC) се пресичат с равнината (ABD), то според теорема 1 правата (AB) е успоредна на пресечницата $a = \alpha \bigcap ABD$. Това дава възможност да определим в равнината (ABD) правата a, която съдържа точката E и е успоредна на правата (AB). Означаваме пресечните точки на правата a с ръбовете на тетраедъра: т. $S_1 = a \bigcap AD$ и т. $S_2 = a \bigcap BD$ (фиг. 3).

2) Успоредните равнини α и (ABC) се пресичат с равнината (ACD) и аналогично на 1) установяваме, че правата (AC) е успоредна на пресечницата $b = \alpha \bigcap ACD$. Това дава възможност да определим в равнината (ACD) правата b, която съдържа т. S_1 и е успоредна на правата (AC). Означаваме: т. $S_3 = b \bigcap CD$ (виж фиг. 3).

3) Правата, определена от точките и S_3, е пресечница на равнините α и (BCD). Това е следствие от аксиома 1.

Тогава сечението на тетраедъра $ABCD$ и равнината α е триъгълник $S_1S_2S_3$ (виж фиг. 3).

Представената в решението на задача 2 логическа конструкция се затвърждава със следващата задача за самостоятелна работа:

Задача 3. Даден е тетраедърът $ABCD$.

(а) Нека т. $E \in ABD$, равнината $\alpha_1 \| (ù \quad)$ и $E \in \alpha_1$. Да се намери сечението $\alpha_1 \bigcap ABCD$.

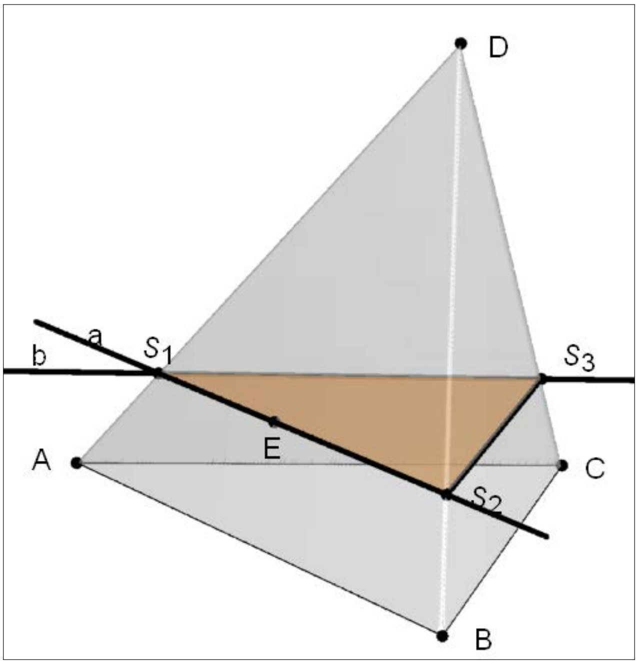
(б) Нека т. $E \in ABD$, равнината $\alpha_2 \| (BCD)$ и $E \in \alpha_2$. Да се намери $\alpha_2 \bigcap ABCD$.

(в) Нека т. $E \in AB$, равнината $\alpha_3 \| (ACD)$ и $E \in \alpha_3$. Да се намери $\alpha_3 \bigcap ABCD$.

(г) Нека т. $E \in ABD$, равнината $\alpha_4 \| (BCD)$ и $E \in \alpha_4$. Да се намери $\alpha_4 \bigcap ABCD$.

Определение: следа на равнината α върху стена на тетраедъра ще наричаме пресечницата на α с равнината на стената.

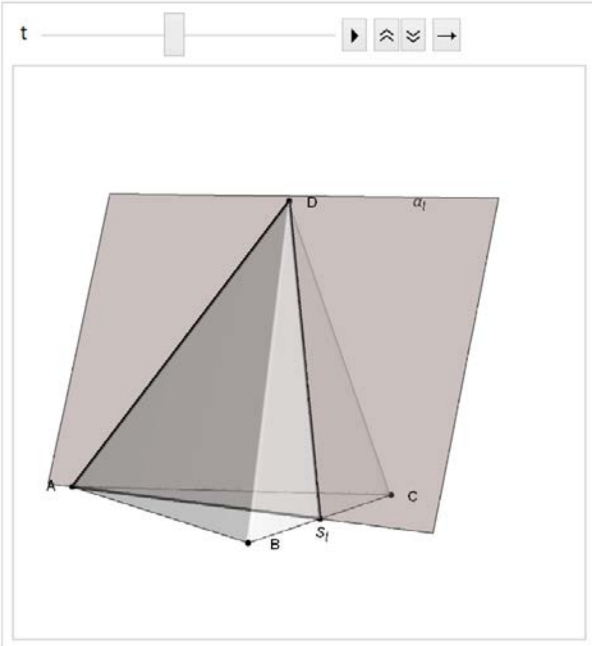
Анимация 2. Даден е тетраедър *ABCD*. Точката $S_t \in BC$, $0 \le t \le 1$, като $S_0 = B, S_1 = C$ и S_t описва отсечката BC, когато t се изменя от нула до едно.



Фигура 3. Сечението на тетраедъра $ABCD$ с равнината α (задача 2)

Анимацията демонстрира сеченията $\beta_t = ABCD \bigcap \alpha_t$, $0 \le t \le 1$, където равнината α_t се определя от трите точки A, D и S_t.

За $0 \le \quad \le 1$ сечението $\beta_t = ABCD \bigcap \alpha_t$ е $\Delta\ AS_tD$, при което $\beta_0 = ABD$, $\beta_1 = ACD$ (фиг. 4.) За произволно избрани сечения β_t се посочват следите на α_t върху (ABC) и (BCD). Подчертава се фактът, че върхът S_t е пресечна точка на реброто BC с която и да е от тези следи.



Фигура 4. Сечение на тетраедър с равнина, определена от три точки (анимация 2)

Разгледаните задачи и анимация 2 илюстрират факта, че:

(i) сечението β на тетраедъра с равнината α е оградено от следи на α върху стени на тетраедъра;

(ii) върховете на сечението β са пресечни точки на ръб на тетраедъра със следа на α, а страните на сечението са отсечки, лежащи на стена на тетраедъра.

Под метод на следата ще разбираме начин за построяване на сечението β с помощта на (i) и (ii).

Ефективността на този метод се основава на факта, че сечението на многостен с равнина е многоъгълник, принадлежащ на секущата равнина и имащ върхове, които принадлежат на ръбове на многостена.

Пълния текст четете в „Математика и информатика", кн. 1.