АВТОРСКА СПРАВКА ЗА НАУЧНИЯ ПРИНОС

от доц. д-р Данаил Стефанов Брезов

Описание на публикациите (по реда, изложен в списъка):

[1] В тази глава се разглеждат нискоразмерни геометрични модели върху полето на рационалните числа, построени като хомогенни пространства от клифордови алгебри с целочислени коефициенти. Проследява се връзката с гаусовите (съответно кватернионните) прости числа, питагоровите спинори и дискретните разслоения на Hopf. Специално внимание е обърнато на задачата за разлагане на движенията при тази конструкция, като се отчита разликата между случаите с евклидова и хиберболична метрика. Групите на движение са построенни с дуално разширение, коментирана е възможността за обобщение в по-високи размерности, както и изграждането на квази-диференциална геоматрия върху тези обекти, ползвайки апарата на нестандартния анализ. Предложени са и примери от физиката: дробно-линейното разлагане при едномерната задача за квантово разсейване и рационалната параметризация за т.нар. "малки групи на Wigner" в $SO^+(3,1)$.

[2] На базата на получено по-рано необходимо и достатъчно условие за разложимост на тримерни ротации с обобщени ъгли на Euler, статията изследва въпроса за крайното пораждане на елементи в $SO(3)$ при зададени два или повече генератора под формата на точки върху единичната сфера. Решението на задачата се свежда до оценка за дължината на геодезичния път, свързващ тези точки, което обобщава класическия резултат на Lowenthal за разлагане с два генератора. Разгледани са и възможностите за оптимизация, които по-големият брой фактори в разлагането предлага, коментиран е и нехомогенния случай, при който обобщението се дава от "принципа за трансфера".

[3] Статията се фокусира основно върху статистическа обработка на данни, конструиране и трениране на модели за машинно обучение, целящи да попълнят липсваща информация в картата на столичния трафик, замърсяване с азотни оксиди и други ключови показатели за качеството на живот в София. За да преодолеем дефицита на данни от измервания, прилагаме колективни регресионни модели (Random Forest и Extreme Gradient Boosting) в два етапа за първостепенната, и съответно второстепенната улична мрежа. Оценката за точността на предсказаните резултати е повишена допълнително поради използването на съвременни AutoML библиотеки в Python, които комбинират по няколко модела за една и съща задача (stacking), и така подобряват ефективността.

[4] Подобно на предишната публикация, и тази е част от колективни усилия по научен проект „Разработване на методология за оценка качеството на въздуха и влиянието му върху човешкото здраве в градска среда“ по ФНИ. За разлика от нея обаче, тук не съм водещ автор и приносът ми е по-скромен: освен с регресионния модел, описващ концентрацията на азотни оксиди в градска среда, съм помагал и с осигуряването на представителност в социологическото проучване, съпътстващо статистическата оценка на дългосрочните ефекти. Изледвали сме влиянието на градския щум и замърсяване, както и достъпа до зелени пространства, върху човешкото здраве според анкетите.

[5] Реализацията на груапата на Lorentz като комплексна проективна права с допълнителна структура (кватернионно умножение) позволява да се правят редица аналогии между познати феномени от класическата механика на Newton и екзотичи ефекти в Специална теория на относителността. Тази статия се възползва от възможността, като изследва "комплексната кинематика" при псевдоротациите в $\mathbb{R}^{3,1}$ и съответно при електромагнитно поле във вакуум. Основен пример е добре познатият ефект на Coriolis, който тук се интерпретира като (класическа) геометрична фаза, и в комплексната реализация се свързва с прецесията на Thomas, ефекта на Sagnac и този на Hall, прилежно изспедвани в различни области от теорията на светлината и елементарните частици. Коментирана е връзката с разлоенията на Hopf и техните не-компактни аналози, значението за квантовите изчисления, и възможността за физична интерпретация на комплесния ъглов момент.

[6] Тук предлагаме решение на един практичен въпрос: как се ориентира ескадрила от летци (или дронове-роботи) при липса на навигация или референтен обект за локализация в пространството? Двумерният случай (например танков батальон в пустинята) е значително по-прост и се реализира лесно с комплексни числа, представени в тригонометричен вид, а при некомутативните тримерни ротации се оказва удобно да ползваме проективни кватерниони поради по-малкия брой параметри. С прилагане на някои съображения за симетрия свеждаме решението до пресичане на квадрики, като условията за съвместимост на системата зависят от зрителния ъгъл на камерите и първоначалната им ориентация. Направили сме също така оценка за средния брой обекти, които всяка камера "вижда", а в края коментираме и съответната кинематична задача (непрекъснатия случай).

[7] Статията разглежда хипер-комплексните алгебри, произлизащи от итерираното векторно произведение в $\mathbb{C}^3$, както и аналитичните свойства на функции, действащи в тях (обобщени условия на Cauchy-Riemann). Самите комплексни числа възникват от ограничаването на тази конструкция върху реалния случай, но тя съдържа и по-екзотични представители, като пара-комплекснатите, би-комплексните и дуалните алгебри, наред с не толкова известни примери. В по-високи размерности вместо векторно произведение ползваме външно умножение, спрегнато с оператора на Hodge. Конструкцията е приложена за "алгебризиране" подвижния репер на Cartan върху гладка крива.

[8] В тази статия се въвежда комплексно-дуален аналог на ротационната формула на Rodrigues за ортогонални оператори в $\mathbb{C}^3[\varepsilon]$. С нейна помощ е изведен алгоритъм за степенуване и коренуване на такива оператори, обобщаващ конструкцията на De Moivre в комплексната равнина. Комбиниран с полярно разлагане, методът дава решение за произволни оператори, като в нилпотентния случай то е изумително просто. Разлагането $\mathfrak{so}_4 \cong \mathfrak{so}_3 \oplus \mathfrak{so}_3$ пренася резултата и за линейни оператори в $\mathbb{C}^4[\varepsilon]$, като при по-високи размерности за разложими елементи на групата влагането на Plücker осигурява ефективна редукция на действието, която може лесно да се опише с техники, заимствани от алгебричната геометрия, както показвам в по-ранна статия. Тази редукция запазва стандартни структури от тримерния случай, като например разлагането в обобщени ъгли на Euler.

[9] Работата е посветена на проективната кватернионна техника и нейните приложения в описанието на ниско-размерни групи на движения - от класическия случай на въртене с неподвижна точка, до групите на Galileo и Lorentz. Фокусът е върху проективното описание на кинематиката (Maurer-Cartan) и любопитното геометрично съответствие между криви в $\mathbb{CP}^3$ (груповото многообразие) и $\mathbb{C}^3$ (обобщената ъглова скорост). Коментиран е дуалният случай, както и динамичните аспекти на конструкцията, показани са конкретни примери с акцент върху приложенията във физиката.

[10] С помощта на кватернионна техника получаваме решенията на широк клас кинематични задачи във вида на SU(2)-пропагатор и $\mathbb{RP}^3$ вектор-параметър. Отначало са систематизирани всички движения с фиксирано направление на ъгловата скорост (или магнитното поле в квантово-механичния аналог). След това описваме ротации с прецесираща ъглова скорост, което при спинови системи съответства на Rabi-осцилатора, използван в ядрено-магнитния резонанс и квантовите компютри. Накрая с помощта на стандартна техника, известна като "картина на взаимодействието", получаваме решенията в общия случай, с просто условие за интегруемост, обобщаващо резонанса на Rabi, който в този контекст интерпретираме като алгебрично условие за разложимост на пропагатора. Ако условията не са изпълнени, имаме итеративна процедура, базирана на разлагането на Magnus.

[11] Разгледана е алтернативна параметризация на тримерни евклидови въртения, базирани на разлагане спрямо две оси, първата от които е фиксирана, а втората прецесира около нея по подходящ начин, така че да осигури условието за разложимост. Двете оси остават през цялово време взаимно перпендикулярни, което значително опростява пресмятанията. Задачата има и хиперболичен аналог с приложения в теорията на разсейването, който е обсъден в друга публикация Фокусът тук е върху механиката на твърдо тяло: получени са изрази за оператора на ъгловия момент и лапласиана в тази параметризация, изведени са кинематичните и динамични уравнения, намерен е клас от аналитични решения, обсъдени са различни възможности за имплементации и обобщения.

[12] В статията се предлагат аналитични решения на задачата за разлагане на тримерни ротации в обобщени ъгли на Euler (спрямо произволни оси). Решенията са изразени чрез компонените на вектор-параметъра (вектора на Rodrigues) за композитното въртене в базиса, образуван от инвариантните оси, като в копланарния случай този базис се допълва с нормалата към равнината. Използвани са дробно-линейни връзки за ковариантните и контравариантни компоненти в обобщения базис, определящ разлагането. Изследвани са сингулярните решения и безкрайните точки.

Други публикации

В статиите, свързани с дисертацията, е представена систематично т.нар. “векторна параметризация” както в евклидовия, така и в хиперболичния случай, посредством проективизация на съответната група на Clifford (кватернионна или псевдо-кватернионна). Нискоразмерните случаи на евклидови и лоренцови метрики се получават без особени усилия, а при по-високи размерности (но все пак в обхвата на алгебрите на Hurwitz) могат да се ползват формални дробно-линейни функции с т.нар. ”матрици на Vahlen”. Един от приносите на по-късните статии е формализирането на този метод и поставянето му в контекста на геометричните алгебри. Това позволява известна свобода на изразяването: например при описанието на групата на Lorentz имаме на разположение рационално представяне с единна формула на Rodrigues (в по-широк смисъл, на Cayley) за всички типове преобразувания, включително не-ортохронните, които се получават по естествен начин като аналитично продължение. Описанието на групата на Möbius върху реалната права и класическата хиперболична геометрия в модела на Poincaré също става естествено при този подход. Друг централен резултат в по-старите публикации е получаването на аналитични решения за обобщеното разлагане на Euler в $SO(3)$ и $SO(2,1)$. Предишните опити предлагат вместо експлицитни формули, сложен алгоритъм, който при това далеч невинаги работи заради неизбежните особености на гладките изображения между проективното пространство и тора (познати на инженерите като ”gimbal lock problem”). В некомпактния случай имаме и изотропна сингулярност, свързана със странното поведение на векторите върху светлиния конус. Интересно е и изследването на необходимите и достатъчни условия за разложимост в двата случая: при ротациите то се свежда до дефинитност на израз, който можем да интерпретираме като детерминанта на Gram за подвижната система от оси, докато при хиперболичните въртения изотропната сингулярност усложнява нещата, но там имаме разлагане на Iwasawa. И в двата случая обаче, оптималната параметризация дава извънредно елегантни и практични решения.

Математически анализ (втора част)

Материалът включва основни понятия от теорията на обикновените диференциални уравнения, интегрирането върху многообразия, векторното смятане и диференциалната геометрия на криви и повърхнини. В учебника е възприет практичен подход, подходящ за студенти от инженерните специалности - новите идеи се въвеждат с примери, теоремите невинаги се доказват строго, често се прави връзка с геометричната и физична интерпретация. При ОДУ първо се усвояват основни техники за решаване на елементарни задачи, и едва след това се формулира теоремата за съществуване и единственост и се въвежда методът на Picard. При уравненията от по-висок ред се използва паралелно и представянето с векторни ОДУ от първи ред, с цел изграждане на геометрична интуиция за свойствата на потока, фундаменталната система решения, спектъра на задачата и фазовия портрет. Разгледани са (в опростен вариант, с повече примери) теми като числени и итеративни методи за намиране на приближени решения, полагане с ред на Taylor и метод на Frobenius, операционно смятане с трансформацията на Laplace, линеаризация и качествен анализ, пертурбации и теория на хаоса. Предложени са интересни примери от физиката, биологията, популационната динамика, икономиката, с богат набор от цветни илюстрации. Разделът, посветен на диференциалната геометрия, започва с въвеждането на допирателно направление и криволинеен интеграл - като инструмент за пресмятане на разстояние и работа. Следвайки физичната интуиция, въвеждаме подвижния репер на Cartan и извеждаме уравненията на Frenet, определящи кривината и торзията. При повърхнините е спазена тази последователност: осмисляне на понятия като нормала, градиент, допирателна равнина и лицев вектор (с прости примери), след това намиране на лица и потоци, и едва тогава дефиниране на гаусова и средна кривина. Теоремите на Green, Stokes и Gauss са въведени с диференциални форми, както е най-естествено, а след това са интерпретирани с ∇-формализма. Отделено е нужното внимание на стандартните координатни смени и техните якобияни. Коментира се теорията на потенциала и връзката с точните ОДУ, а в края на учебника е въведен накратко и вариационният подход, с няколко интересни примера: геодезични и минимални повърхнини.