РЕЦЕНЗИЯ

от доц. д-р **Димитър Владиславов Атанасов**
деп. Информатика, Нов български университет,
4.5 Математика

за придобиване на научната степен **доктор** по професионално направление
4.6. Информатика и компютърни науки
с кандидат асистент **Невяна Димитрова Георгиева**

Рецензията е съгласно заповед З-РК-233 от 05.05.2022 на Ректора на Нов български университет, назначаваща научно жури по процедурата за защита на докторска дисертация на Невяна Димитрова Георгиева, реговен докторант със стипендия в докторската програма по "Информатика".

Предоставените към процедурата за защита материали включват:

- Дисертационен труд;
- Автореферат;
- Автобиография;
- Копие от заповед за определяне на научно жури;
- Заповед за зачисляване;
- Заповед за отчисляване;
- Препис от дневен ред на Факултетния съвет на Магистърски факултет на НБУ за финална атестация на докторанта.

Невяна Георгиева е редовен докторант към деп. "Информатика"на Нов български университет, зачислена със заповед N61/26.10.2012, отчислена с право за защита по заповед на Ректора на НБУ З-РК-350 от 19.07.2017. За периода на обучение докторантката е използвала прекъсване с продължителност 1 година.

Дисертационният труд, озаглавен "Мрежово кодиране и аналози на дизайн разглежда задачата за съществуване на дизайни в геометрии с проективни координати над крайни пръстени. Изучаването на подобни проблеми започва в началото на XX век с работата на Йелмслев, като в началото на втората половина на века редица автори постигат сериозен напредък в изследването на тази област.

Мотивацията за този дисертационен труд идва от теория на кодирането, но по същество той може да бъде отнесен към теория на комбинаторните конфигурации (дизайни) или към крайните проективни геометрии. Основната задача, която си поставя дисертантът, е намирането на необходими и достатъчни условия за съществуването на специална структура, наречена спред в едни малко познати геометрии – координатните геометрии над крайни верижни пръстени. Спред е множество от подпространства от определен тип, които покриват всички точки на геометрията. Връзката с теория на кодирането се дължи на факта, че такива множества могат да се използват като кодове в специална метрика – ранговата метрика – и да се прилагат за предаване на данни при един нов вид кодиране – мрежово кодиране.

Въпросът за намирането на необходими и достатъчни условия за съществуването на спредове от подпространства с фиксирана размерност е решен в случая на проективните геоемтрии на Галоа $PG(r, q)$. Там се оказва, че очевидното необходимо условие, а именно, броят на точките в подпространството да дели броя на всички точки, е и достатъчно. В геометриите на Йелмслев това е вярно само за случая на спредове от подпространства на Йелмслев, т.е. подпространства, асоциирани със свободни модули. В общия случай това условие не е достатъчно и решението на този въпрос е доста по-трудно. В настоящия дисертационен труд е представено решение на тази задача в някои важни специални случаи. Конструирани са и примери, в които спредове от подпространства от зададени (несвободни) типове не съществуват. Разгледана е и по-общата задача за съществуване на т.нар. R-аналози на дизайни в проективни геоемтрии на Йелмслев.

Дисератционният труд е в обем от 78 машинописни страници и се състои от четири глави и списък на използваната литература, включващ 85 заглавия. По-нататък е изложено накратко съдържанието на дисертацията и получените резултати в нея.

Глава 1 е уводна. Тя започва с кратък исторически обзор на развитието на онези области, които имат отношение към дисератционния труд. Най-напред това са координатните геометрии над пръстени, които водят началото си някъде от началото на XX век. Първоначално това са разширения на реалните числа като например дуалните числа на Щуди, по-късно се разглеждат геометрии над произволни верижни пръстени. През 70-те и 80-те години започва изследване на кодове по отношение на т.нар. рангова метрика, а още по-късно към 2008 г. се поставят основите на мрежовото кодиране с една работа на Кьотер и Кшишанг. Един мрежов код е грубо казано множество от подпространства в някаква геометрия, имащи някакви метрични свойства по отношение на ранговата метрика. В настоящия труд подпространствата се вземат от кординатна геометрия над верижен пръстен. По-нататък в главата е направен преглед на резултатите, които се съдържат в нея.

Глава 2 е посветена на излагането на основните теоретични резултати, които се използват в дисертацията. Тя е структурирана в три части, в които са представени последователно резултати за верижни пръстени, за модули над верижни пръстени и за проективни и афинни координатни геометрии над верижни пръстени. В първия раздел е изложен резултат, описващ общата структура на краен верижен пръстен. Най-общо крайните верижни пръстени са факторпръстени на пръстени на Галоа; те не са непременно комутативни и характеристиката им е степен на просто число. В този раздел е дефинирана и една линейна наредба на елементите на верижен пръстен, която се използва по-късно при въвеждане на стандартната форма на матрица. Описана е и пълната класификация на верижните пръстени с индекс на нилпотентност 2.

Раздел 2.2, който е посветен на модули над крайни верижни пръстени, съдържа два важни резултата: първият от тях (Теорема 2.7) е структурна теорема, съгласно която всеки крайно породен модул над верижен пръстен е директна сума на циклични модули. Другият важен резултат е Теорема 2.8, в която се извежда точна формула за броя на подмодулите от фиксиранн тип μ, които се съдържат в модул от друг фиксиран тип λ. Тази формула може да се разглежда като обобщение на коефициентите на Гаус.

В раздел 2.3 са изложени някои от по-важните структурни резултати за координатни геометрии над крайни верижни пръстени, които са геометрии на Йелмслев. Тези геометрии могат да се въведат и аксиоматично като при допускане на дезарговост заедно с някои допълнителни условия (достатъчен брой на точки върху права) геометриите на Йелмслев са точно координатните геометрии над верижни пръстени. Геометриите на Йелмлсев имат интересна вложена структура, която, макар и по-сложна от тази на геометриите на Галоа, позволява ефективно изследване. В няколко теореми (2.11-2.14) са изложени важни резултати като този, че фактор структурата на геометрия на Йелмслев е отново геометрия на Йелмслев над верижен пръстен с по-малък индекс на нилпотентност.

Оригиналните резултати за дисертационния труд се съдържат в глави 3 и 4.

Глава 3 е посветена на един проблем, който макар и страничен е важен за всякакви изследвания в геометрии на Йелмслев и въобще при работа с модули над крайни верижни пръстени. Това е въпросът за предствянето на един модул. Разбира се, всеки модул може да се зададе с негов базис, но това представяне не е единствено и води различни затруднения. Така например, въпросът дали редовете на две различни матрици пораждат един и същи модул не е очевиден. В тази глава се въвежда специална форма на матрица, която е единствена за всеки модул, чийто редове пораждат модула и която позволява лесно сравняване и лесни операции с модули.

Това предствяне се въвежда с Дефинция 3.1.1 и е аналог на т.нар. row-reduced echelon form на матрица. Най-важният резултат тук е Теорема 3.3, в която е доказано, че с всеки модул над верижен пръстен R може да се свърже единствена матрица в стандартна форма, чиито редове пораждат модула. От този резултат може да се получи, че всеки модул е изоморфен на модул с пораждаща матрица в хубава триъгълна (блочна) форма. Това съответства на стандартната пораждаща матрица на линейните кодове над крайни полета. Това е описано в Следствие 3.4. От тази стандартна форма може да се получи в явен вид пораждаща матрица за ортогоналния модул $M_R^{\perp}$ на изходния модул ${}_RM$.

По-нататък в тази глава въведената стандартна форма се използва за удобна работа с модули. Предствени са в псевдокод няколко алгоритъма за следните задачи: получаване на матрица в стандартна форма, намиране на обединението и сечението на модули, проверка принадлежност на вектор към даден модул, намиране на ортогоналния на даден модул, пораждане на всички подмодули от даден тип, пораждане на всички подмодули със зададен тип, съдържащи се във фиксиран модул.

Глава 4 е посветена на т.нар. R-аналози на дизайни и по-специално на спредове. Последните се дефинират като множества от подпространства в дадена геометрия на Йелмслев, които представляват разбиване на точковото множество на геометрията. Тази глава също е разделена на три части.

В раздел 4.1 се въвеждат R-аналози на дизайни по сходен начин с q-аналозите на дизайни над крайни полета. Това е семейство от подмодули от фиксиран тип, притежаващи определени регулярни свойства: например, всеки подмодул от даден тип да се съдържа фиксиран брой пъти или поне фиксиран брой пъти. Доказани са някои прости комбинаторни необходими условия за съществуване на такива дизайни и са описани връзките между различните типове дизайни. Особено важни както в класическия случай са дизайните, при които всеки подмодул се среща точно веднъж. В аналогия с класическия случай те се наричат Щайнерови системи. Спредовете, които са обект на изследване в следващия раздел, са точно Щайнерови системи. Интерсено е, че няма известни други Щайнерови системи както при q-аналозите, така и при R-аналозите на дизайни.

Раздел 4.2 съдържа резултати за съществуването на спредове. По-специално, в него е доказано едно необходимо и няколко достатъчни условия. За спредове от свободни подпространства (т.нар. подпространства на Йелмслев) задчата е решена от Кирмайер и Ланджев. При тях се оказва, че комбинаторното необходимо условие е и достатъчно, точно както и в геометриите на Галоа $PG(r, q)$.

По-важните резултати в този раздел са Теорема 4.8, в която е намерно необходимо условие за съществуване на спредове, което обобщава това на Кирмайер-Ланджев (Теорема 4.7). По-нататък са доказани няколко достатъчни условия за съществуване спредове от несвободни подпространства (Теореми 4.10–1.12). Накрая е изказана и хипотеза за необходимо и достатъчно условие за съществуване на спредове в геометрии на Йелмслев, за което към настоящия момент не съществува контарпример. Целият раздел 4.3 е посветен на конструирането на пример, с който да се демонстрира, че тривиалното комбинаторно условие (т.е. броят на точките в подпространство от спреда да дели броя на точките в геометрията), което е необходимо, не винаги е достатъчно. В единствената теорема тук (Теорема 4.13) е доказано, че в пространства над пръстени R с индекс на нилпотентност 2 за всички четни $n \geq 4$ в геометрията $PHG({}_RR^n)$ не съществуват спредове от подпространства от тип $\lambda = 2^{n/2}1^a$, където $1 \leq a \leq \frac{n}{2}$. С това е получен широк клас от типове на подпространства, за които комбинаторното необходимо условие за съществуване на спредове не е достатъчно. Към настоящия момент не е получено необходимо и достатъчно условие за съществуване на спредове от (несвободни) подпространства в геометрии на Йелмслев, макар настоящият труд да е съществена стъпка в тази посока.

От направенто дотук изложение може да се обобщи, че основните научни приноси на дисертационния труд са:

- Намерена е стандартна форма за матрици над краен веричен пръстен, при които за всеки крайно породен модул съществува единствена матрица в стандартна форма, чиито редове пораждат модула.
- За десен модул, породен от матрица в стандартна форма, е намерена матрица, пораждаща ортогоналния модул.
- Описаните по-горе резултати са илюстрирани чрз алгоритми за работа с модули.
- Установени са достатъчни условия за съществуване на спредове от несвободни модули
- Показани са примери на типове λ, за които необходимото комбинаторно условие не е достатъчно.

При изследването на проблема дипломантката е използвала 85 литературни източника. Най ранните от тях са от първата половина на XX-ти век, когато са поставени основните проблеми в областта. Преобладаващата част от цитираната литература е от последните 20 години, което показва, че дипломантката има поглед както върху класическите работи в областта, така и върху съвременните резултати, публикувани през последните години.

Работата на докторанта показва задълбочени познания и опит в предметната област на дисертационния труд. Основние резултати, описани в работата, са публикувани в три публикации, от които една самостоятелна и две в съавторство с научния ръководител. Едната от тях е в престижно списание от Q2 по WoS. Две от публикациите са в български издания с традиционно висок статут в професионалната общност.

Основни резултати от дисертационния труд са докладвани на 8 научни форума, 7 от които международни. Три от представянията са на научната конференция Computer Science and Education in Computer Science, която традиционно се организира от НБУ, съвместно с университетите във Фулда (Германия) и Бостън (САЩ). Докторантката е докладвала четири пъти на международен форум в предметната област на дисертацията Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory.

Може да се заключи, че резултатите на дисертационния труд са апробирани в достатъчна степен и са получили популярност, както в страната, така и в чужбина.

В личен и професионален план познавам Невяна Георгиева още от нейните студентски години в периода, когато разработваше своята магистърска теза в областта на теория на вероятностите и разклоняващите се стохастични процеси. В последсвие тя стана щатен преподавател към Факултета по математика и информатика на СУ "Св. Климент Охридски"и пренасочи своите интереси към теория на кодирането. От 2020 г. е хоноруван преподавател към департамент "Информатика"на НБУ, където преподава математически дисциплини с използванто на специализиран софтуер. Трябва да се очете високото мнение на студентите относно нейните преподавателски качества и усърдие в процеса на работа.

Заключение. С оглед на изложениете по-горе резултати убедено давам своята **положителна оценка** за дисертационния труд, постигнатите резултати и приноси, предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен “доктор” на Невяна Димитрова Георгиева в област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.6. Информатика и компютърни науки.

доц. д-р Д. Атанасов